TEOREMAS DE LA FORMA EN PROBABILIDAD

Saraí Hernández Torres[*]

6 de julio de 2022

Geometría Prohibida, Universidad Autónoma de San Luis Potosí

Notas

ÍNDICE

PRESENTACIÓN

Estas notas corresponden al par de charlas *Teoremas de la Forma en Probabilidad (I y II)* que se presentaron en la escuela de verano *Geometría Prohibida*, del Instituto de Física de la Universidad Autónoma de San Luis Potosí.

[*] www.saraiht.com

Las charlas fueron dirigidas a estudiantes de licenciatura y maestría en matemáticas. Uno de los pre-requisitos es un curso elemental de probabilidad y nociones elementales de teoría ergódica (éstas últimas fueron presentas en charlas paralelas durante la escuela de verano).

Los siguientes libros y notas se utilizaron como referencia en cada tema, y su lectura es recomendada para aquellos que quieran profundizar en los temas.

- *Percolación.* La referencia clásica es el libro de Geoffrey Grimmett [4]. Una introducción concisa y moderna se encuentra en las notas de Hugo Duminil-Copin [3].
- *Percolación de primer pasaje.* El libro de Antonio Auffinger, Michael Damron y Jack Hanson es una excelente introducción a la teoría de percolación de primer pasaje y presenta los numerosos problemas abiertos en el área [1].

Este documento se encuentra en preparación y con probabilidad uno contienen múltiples errores. Su autora agradecerá recibir correcciones y comentarios.

1 INTRODUCCIÓN

Charla 1 (1 hora)
4 de julio de 2022

Comencemos con respuestas a tres preguntas básicas:

1. Contexto: ¿de qué hablaremos en estas charlas?
2. Motivación: en términos generales ¿qué propiedad queremos entender?
3. Objetivo: específicamente, ¿qué objeto estudiaremos?

En estas charlas hablaremos de modelos matemáticos para un medio (o ambiente) aleatorios. El contexto queda definido con la introducción de dos modelos de probabilidad centrales en esta charla: la *percolación Bernoulli* y *percolación de primer pasaje*. Luego, como motivación presentaremos el problema geométrico que nos interesa entender. Al final, haremos concretos nuestros objetivos presentando una definición central en estas charlas.

1.1 *Contexto: medios aleatorios discretos*

Los modelos probabilísticos en este curso están definidos sobre la gráfica $\mathbb{Z}^d = (\mathbb{V}, \mathbb{E})$. El conjunto de vertices $\mathbb{V}$ consiste en vectores d-dimensionales con entradas entradas

$$\mathbb{V} := \{x = (x_1, \ldots, x_d) \ : \ x_i \in \mathbb{Z} \text{ para cada } i = 1, \ldots d\}.$$

Dos vertices $x, y \in \mathbb{V}$ son *vecinos cercanos*, y se escribe $x \sim y$, si $\|x - y\|_1 = 1$. El conjunto de aristas $\mathbb{E}$ consiste de todos los pares de vecinos cercanos en $\mathbb{Z}^d$, es decir

$$\mathbb{E} := \{(x, y) \in \mathbb{V} \times \mathbb{V} \ : \ x \sim y\}.$$

1.1.1 Percolación Bernoulli

La percolación Bernoulli es el modelo más simple de un medio poroso. La imagen clásica, relacionada a este modelo, corresponde a una roca o a un suelo rocoso. Si la roca está rodeada de agua, o bien llueve sobre el suelo rocoso, entonces el agua pasará por algunos caminos pero su recorrido presentará obstáculos.

1.1 DEFINICIÓN (Broadbent y Hammersley, 1957). Sea $p \in [0, 1]$. En la percolación Bernoulli de enlaces, cada arista e tiene asociada una variable aleatoria $\tau(e)$. Las variables aleatorias $(\tau(e) : e \in \mathbb{E})$ son independientes y todas ellas siguen una distribución Bernoulli de parámetro p. Es decir,

$$\tau(e) = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } p \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - p \end{cases}$$

independientemente del valor de otras aristas. Denotaremos por $\mathbb{P}_p$ a la medida de probabilidad asociada a la percolación Bernoulli de enlaces con parámetro p.

La colección de valores $\tau = (\tau(e) : e \in \mathbb{E})$ define una configuración de percolación en $\mathbb{Z}^d$. Si $\tau(e) = 1$, decimos que la arista e está *abierta*, mientras que si $\tau(e) = 0$ entonces decimos que la arista e está *cerrada*. El conjunto de aristas abiertas define una sub-gráfica de $\mathbb{Z}^d$, que denotaremos por $\mathcal{G}_p$. Un *clúster* es una componente conexa de $\mathbb{G}_p$. Cuando $\mathcal{G}_p$ tiene un clúster infinito, decimos entonces que la configuración percola.

1.2 OBSERVACIÓN. Alternativamente, se puede definir la percolación sobre los vértices de una gráfica (en nuestro caso, los vértices de $\mathbb{Z}^d$). Esta variante se conoce como percolación Bernoulli de sitio, o *Bernoulli site percolation* en inglés. De manera análoga, cada vértice queda abierto con probabilidad p y cerrado con probabilidad $1 - p$, independientemente del estado de otros vértices.

1.3 OBSERVACIÓN. La percolación Bernoulli de enlaces, definida en 1.1, es conocida en inglés como *Bernoulli bond percolation*. En adelante solamente nos referiremos a la percolación Bernoulli sobre aristas, así que nos referiremos a ella simplemente como percolación Bernoulli.

En percolación Bernoulli con parámetro $p = 0$, casi seguramente todas las aristas están cerradas, mientra que si $p = 1$ entonces todas las aristas están abiertas. Intuitivamente, para un parámetro pequeño $p \ll 1$, la mayoría de las aristas se encontraría cerradas y $\mathcal{G}_p$ estaría compuesta por clústeres finitos. Por otra parte, cuando p es suficientemente grande, la intuición indica que $\mathcal{G}_p$ contiene un clúster infinito.

Sea

$$\theta_p := \mathbb{P}_p\,(0 \text{ pertenece a un clúster infinito})$$

y definamos el *parámetro crítico* de la percolación Bernoulli por

$$p_c := \text{ínf}\Big\{p \in [0,1] \ : \ \theta_p > 0\Big\}.$$

Cuando la dimensión de $\mathbb{Z}^d$ es $d \geq 2$, entonces $p_c \in (0,1)$. Si $p > p_c$ decimos que la percolación se encuentra en la fase *super-crítica*.

En los ejercicios del taller, trabajaremos problemas relacionados con la transición de fase. Durante las charlas, únicamente estudiaremos la fase super-crítica de la percolación Bernoulli.

1.1.2 Percolación de primer pasaje

En una primera aproximación, podemos entender a la percolación de primer pasaje como una generalización de la percolación Bernoulli. Los valores de las aristas siguen siendo una familia de variables aleatorias independientes con una distribución común, pero no necesariamente Bernoulli.

1.4 DEFINICIÓN (Hammersley y Welsh, 1965). Sea F una distribución de probabilidad con soporte en los reales no-negativos. En la percolación de primer pasaje, cada arista e tiene asociada una variable aleatoria $\tau_F(e)$. Las variables aleatorias $\tau_F = (\tau(e) : e \in \mathbb{E})$ son independientes y con distribución común F. Es decir, para cada arista $e \in \mathbb{E}$,

$$\mathbb{P}(\tau_F(e) \leq t) = F(t), \qquad t \geq 0.$$

Un ejemplo ilustrativo es considerar la distribución exponencial de parámetro 1. En este caso especial, la distribución de los tiempos de pasaje es

$$\mathbb{P}(\tau_{\text{Exp}}(e) > t) = e^{-t}, \qquad t \geq 0,$$

para cada arista e en $\mathbb{Z}^d$.

1.2 *Motivación: la forma límite*

En los dos modelos anteriores, percolación Bernoulli y percolación de primer pasaje, definimos familias de variables aleatorias $(\tau(e) : e \in \mathbb{E})$. Cada una de estas variables aleatorias toma valores no-negativos (casi seguramente), que interpretaremos como *el tiempo de pasaje*.

Los tiempos de pasaje definen una pseudométrica aleatoria. Un camino Γ es una sucesión contable (finita o infinita) de aristas $\Gamma = (e_1, e_2, \ldots)$ tales que e_i y e_{i+1} tienen exactamente un vértice común. El tiempo de pasaje de Γ se define por

$$T_F(\Gamma) := \sum_{e \in \Gamma} \tau_F(e).$$

Para los vértices $v, w \in \mathbb{V}$, definimos la pseudométrica

$$T_F(v,w) := \text{ínf}\, T_F(\Gamma),$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los camino finitos entre v y w.

1.5 OBSERVACIÓN. Cuando el soporte de los tiempos de pasaje (por aristas) son los enteros positivos, como es el caso de τ_{Exp}, entonces la función T define una métrica en $\mathbb{Z}^d$.

De forma natural podemos extender la definición de la métrica T a $\mathbb{R}^d$. Para cada $x \in \mathbb{R}^d$, definimos $[x] \in \mathbb{V}$ como el único vértices en $\mathbb{Z}^d$ tal que $x \in [x] + [0,1)^d$. Entonces definimos

$$\mathrm{D_F}(x,y) := \mathrm{T_F}([x],[y]), \qquad x,y \in \mathbb{R}^d.$$

Consideremos la bola asociada a la pseudo-métrica T:

$$\mathrm{B_F}(t) := \{x \in \mathbb{R}^d \ : \ \mathrm{D_F}(0,x) \leq t\}.$$

El *teorema de la forma* se refiere a la geometría de $\mathrm{B}(t)$ conforme $t \to \infty$. Después de un escalamiento lineal, el teorema de la forma indica que, bajo ciertas condiciones, $\frac{1}{t}\mathrm{B}(t)$ converge, con probabilidad uno, a un subconjunto $\mathcal{B}_{\mathrm{F}} \subset \mathbb{R}^d$ convexo, compacto y *determinístico*. Este teorema fue demostrado primero por Richardson en 1973 en el caso de la distribución exponencial; su versión general fue probada por Cox y Durrett en 1981. A manera de ejemplo, presentamos el teorema de Richardson.

1.6 TEOREMA (Richardson, '73). *Existe un subconjunto $\mathcal{B}_{Exp} \subset \mathbb{R}^d$ determinístico, convexo y compacto tal que para cada $\varepsilon > 0$,*

$$\mathbb{P}\left((1-\varepsilon)\mathcal{B}_{Exp} \subset \frac{\mathrm{B}_{Exp}(t)}{t} \subset (1+\varepsilon)\mathcal{B}_{Exp} \text{ para todo } t \geq \mathrm{T}_0\right) = 1.$$

Para ninguna distribución se ha logrado determinar la forma límite $\mathcal{B}_{\mathrm{F}}$ (ni siquiera para la distribución exponencial). A esta pregunta abierta le podríamos llamar el *misterio de la forma*. El lector puede leer en [1] un resumen sobre los resultados acerca de la forma límite.

1.3 *Objetivo: la constante de tiempo*

Nuestro primer objetivo será entender el comportamiento asintótico de la distancia T en una dirección dada. Notemos que cada dirección corresponde a un punto en la esfera unitaria en $\mathbb{R}^d$, que denotamos por $\mathbb{S}^{d-1} := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 = 1\}$.

1.7 DEFINICIÓN. La *constante de tiempo* en la dirección $x \in \mathbb{S}^{d-1}$ se define por

$$\mu_{\mathrm{F}}(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{T_F}([0],[n \cdot x])}{n}$$

cuando este límite existe (en algún tipo de convergencia de variables aleatorias).

1.8 TEOREMA. *Sea* $t_1, \dots, t_{2d}$ *variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, siguiendo la distribución* F. *Si* $\mathbb{E}\,\text{mín}\{t_1, \dots, t_{2d}\} < \infty$ *entonces para cada* $x \in \mathbb{S}^d$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{T_F}([0], [n \cdot x])}{n} = \mu_\mathrm{F}(x) < \infty \qquad \textit{casi seguramente y en } \mathrm{L}^1$$

2 EL TEOREMA ERGÓDICO

En esta sección consideremos una colección de variables aleatorias $\mathrm{X} = (\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Consideraremos a X como la evolución de un sistema aleatorio conforme pasa el tiempo parametrizado por $\mathbb{N}_0$, y decimos entonces que X es un *proceso estocástico*.

Un proceso estocástico X es (fuertemente) *estacionario* si, para cualesquiera $k \in \mathbb{N}_0$,

$$(\mathrm{X}_{t+s})_{t\in\mathbb{N}_0} \stackrel{d}{=} (\mathrm{X}_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$$

donde la igualdad es en distribución; esto significa que para cada $m \geq 0$, los vectores aleatorios $(\mathrm{X}_0, \dots, \mathrm{X}_m)$ y $(\mathrm{X}_s, \dots, \mathrm{X}_{m+s})$ tienen la misma distribución. Esta igualdad indica que la distribución (o ley) del proceso X es invariante bajo traslaciones en el tiempo.

Recordemos que X es un proceso ergódico si la "σ-álgebra invariante es trivial". Dar una definición precisa necesita la descripción de la σ-álgebra invariante y para ellos referimos al lector a [REF]. Para los propósitos de esta charla, nos basta indicar que todo proceso con *independencia asintótica* es ergódico.

2.1 TEOREMA (El teorema ergódico; Birkhoff, '31, Von Neumann '32). *Sea* $(\mathrm{X}_n)_{n\geq 0}$ *un proceso en* $\mathbb{R}$ *estacionario y ergódico tal que* $\mathbb{E}(\mathrm{X}_0) < \infty$. *Entonces se satisface que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{X}_k = \mathbb{E}(\mathrm{X}_0) \qquad \textit{casi seguramente y en } \mathrm{L}^1.$$

La moraleja del teorema ergódico es que el promedio den el tiempo converge al valor esperado. Resulta ser una generalización de la ley de los grandes números.

El teorema ergódico prueba la existencia de la constante de tiempo en un caso trivial: cuando la gráfica subyacente es $\mathbb{Z}$.

2.2 PROPOSICIÓN. *Consideremos la percolación de primer pasaje en los enteros:* $\tau_\mathrm{F} = (\tau_\mathrm{F}(n) : n \in \mathbb{Z})$ *y supongamos que* $\mu_\mathrm{F} = \mathbb{E}(\tau_\mathrm{F}(0)) < \infty$. *Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{T_F}(0, n)}{n} = \mu_\mathrm{F},$$

casi seguramente y en L_1.

El teorema ergódico no es suficiente para probar la existencia de la constante de tiempo en dimensiones $d \geq 2$. En dimensión $d = 1$, tenemos un único camino (sin repetir aristas) entre 0 y nx, pero cuando $d \geq 2$ tenemos 2^d caminos disjuntos entre dos vértices. En la siguiente sección veremos un tipo de teorema ergódico que nos permitirá sobrepasar esta dificultad.

3 EL TEOREMA ERGÓDICO SUBADITIVO

Charla 2 (1 hora)
6 de julio de 2022

La primera versión del teorema ergódico subaditivo es un resultado de Kingman [6] y al resultado frecuentemente se le conoce por "Teorema ergódico subaditivo de Kingman". La versión que presentamos refinamiento de Liggett.

3.1 TEOREMA (El teorema ergódico subaditivo, Liggett '85). *Si* $(X_{m,n})_{0 \leq m < n}$ *satisface:*

(a) $X_{0,n} \leq X_{0,m} + X_{m,n}$ *para todo* $0 < m < n$*;*

(b) $(X_{m,m+k})_{k \geq 1} \stackrel{d}{=} (X_{m+1,m+1+k})_{k \geq 1}$ *para todo* $m \geq 0$*;*

(c) para cada $k \geq 1$*, el proceso* $(X_{nk,(n+1)k})_{n \geq 0}$ *es estacionario y ergódico; y*

(d) $\mathbb{E}X_{0,1} < \infty$ *y* $\mathbb{E}X_{0,n} > -cn$ *para una constante* $c < \infty$*.*

Entonces,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{X_{0,n}}{n} = L,$$

casi seguramente y en L^1.

Equipados con el teorema ergódico subaditivo, podemos entonces demostrar la existencia de la constante de tiempo en $\mathbb{Z}^d$, bajo cierta condición de integrabilidad de los tiempo de pasaje. Esta versión del teorema es de Kesten [5].

3.2 TEOREMA. *Sean* $t_1, \ldots, t_{2d}$ *variables aleatorias independientes con distribución* F. *Si* $\mathbb{E} \min\{t_1, \ldots, t_{2d}\} < \infty$*, entonces*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{D(0, ne_1)}{n} = \mu(e_1) < \infty,$$

casi seguramente y en L^1.

La prueba del Teorema 3.2 es una aplicación directa del Teorema 3.1 y basta verificar sus hipótesis. Resulta que las condiciones a, b c y la segunda parte de d son inmediatas. Sin embargo, la primera parte de d necesita un poco más de atención. Es precisamente de d que se obtiene la condición sobre la integrabilidad de la variable aleatoria $\min\{t_1, \ldots, t_{2d}\}$.

4 EL TEOREMA DE LA FORMA DE COX-DURRETT

La extensión del Teorema 3.2, a una convergencia uniforme en todas las direcciones de $\mathbb{S}^{d-1}$, es el famoso teorema de la forma. Ya hemos presentado en el Teorema 1.6 la versión para la distribución exponencial. El siguiente teorema de Cox y Durrett provee condiciones sobre la distribución de tiempos de pasaje para obtener la convergencia deseada.

4.1 TEOREMA (Teorema de la forma, Cox-Durrett, '81 [2]). *Sean $t_1, \dots, t_{2d}$ variables aleatorias independientes con distribución* F. *Supongamos que*

(a) *(d-integrabilidad)* $\mathbb{E} \min\{t_1^d, \dots, t_{2d}^d\} < \infty$, *y*

(b) *(no colapso)* $F(0) < p_c(d)$, *donde $p_c(d)$ es el parámetro crítico de percolación Bernoulli en $\mathbb{Z}^d$.*

Entonces existe un conjunto $\mathcal{B}_F \subset \mathbb{R}^d$ determinístico, convexo y compacto tal que, para cada $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left((1-\varepsilon)\mathcal{B}_F \subset \frac{B_F(t)}{t} \subset (1+\varepsilon)\mathcal{B}_F \textit{ para todo } t \geq T_0 \right) = 1. \tag{1}$$

Más aún, $\mathcal{B}_F$ corresponde a la bola unitaria asociada a la norma asintótica μ, definida por la constante de tiempo.

Estas condiciones no solamente son necesarias pero también suficientes. Una aplicación del segundo teorema de Borel-Cantelli muestra que si la distribución F no satisface la condición a, entonces para todo $C > 0$ existe una infinidad de vértices x en $\mathbb{Z}^d$ tales que

$$T_F(0, x) > C|x|_1,$$

y por tanto la contención $t^{-1}B_F(t) \subset (1+\varepsilon)\mathcal{B}_F$ en (1) no se puede satisfacer. Por otra parte, si F no satisface b, entonces existe una componente infinita de aristas con tiempo de pasaje 0. Es un teorema conocido que esto implica que $\mu(e_1) = 0$ (véase Teorema 6.1 en [5], o Teorema 2.5 en [1]) y por lo tanto la contención $(1-\varepsilon)\mathcal{B}_F \subset t^{-1}B_F(t)$ en (1) no es posible.

5 PROPIEDADES ELEMENTALES DE LA PERCOLACIÓN BERNOULLI

Taller 1 (2 horas)
4 de julio de 2022

La solución a los siguientes ejercicios se encuentra en cualquier introducción a percolación. Por ejemplo, las primeras páginas de [3].

1. Describe el espacio de probabilidad que define (formalmente) la percolación Bernoulli de parámetro $p \in [0, 1]$.

2. Muestra que la existencia de una componente conexa infinita es un evento medible.

3. Demostrar que $p_c(\mathbb{Z}) = 1$.

4. Si $d \geq 2$, demostrar que $p_c(\mathbb{Z}^d) > 0$ y es único.

5. ¿Por qué $p_c(\mathbb{Z}^2) < 1$ implica que $p_c(\mathbb{Z}^d) < 1$?

6. Demostrar que $p_c(\mathbb{Z}^2) < 1$. *Hint: usar dualidad*.

REFERENCIAS

[1] A. Auffinger, M. Damron, and J. Hanson, *50 years of first-passage percolation*, University Lecture Series, vol. 68, American Mathematical Society, 2017.

[2] J. T. Cox and R. Durrett, *Some limit theorems for percolation processes with necessary and sufficient conditions*, Ann. Probab. **9** (1981), no. 4, 583–603.

[3] H. Duminil-Copin, *Introduction to Bernoulli percolation*, https://www.ihes.fr/ duminil/publi/2017percolation.pdf.

[4] G. R. Grimmett, *Percolation*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer, Berlin, Heidelberg, 1999.

[5] H. Kesten, *Aspects of first passage percolation*, École d'Été de Probabilités de Saint Flour XIV - 1984 (Berlin, Heidelberg) (P. L. Hennequin, ed.), Springer Berlin Heidelberg, 1986, pp. 125–264.

[6] J. F. C. Kingman, *Subadditive Ergodic Theory*, Ann. Probab. **1** (1973), no. 6, 883–899.

* * *